مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$2z^2w'' + zw' + (z^2-3)w = 0 \quad \text{--- (1)}$$

بجوار النقطة $z=0$

الحل: نلاحظ بعد تقسيم طرفي المعادلة المعطاة (1) على $2z^2$ فإن الدالتين $p(z)=\frac{1}{2z}$ (نقطة شاذة) و $q(z)=\frac{z^2-3}{2z^2}$ (نلاحظ أن $z=0$ شاذة للدالتين p, q).

لكن $zp(z)=\frac{1}{2}$ ، $z^2 q(z)=\frac{z^2-3}{2}$ تحليليات عندما $z=0$

إذاً النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة نظامية للمعادلة (1) وبناء على ذلك نوجد الحل بالنسبة لنقطة شاذة أساسية.

الحل يكون من الشكل (حسب النظرية)

$$w=\left[z^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{n+\lambda}\right] \quad \text{--- (2)}$$

الآن نشتق هذه العلاقة (معادلة الحل المفروض) بالنسبة لـ z مرتين متتاليتين ونبدل في المعادلة المعطاة (1) كما يلي:

$$(2) \underset{z \text{ بالنسبة لـ}}{\overset{\text{الاشتقاق}}{\Longrightarrow}} w' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) C_n z^{n+\lambda-1}$$

$$w'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) C_n z^{n+\lambda-2}$$

وبالتعويض في معادلة (1) يكون

$$(1) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\lambda)(n+\lambda-1) C_n z^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) C_n z^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{n+\lambda+2} - \sum_{n=0}^{\infty} 3 C_n z^{n+\lambda} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+(n+\lambda)-3] C_n z^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{n+\lambda+2} = 0$$

وهنا نبدل الآن كل n بـ $n-2$ في المجموع الأخير المتجانس في القوس ونقسم المعادلة على z^λ فنجد:

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+(n+\lambda)-3] C_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} z^n = 0$$

بعد ذلك نطلق حدين من المجموع الأول لأجل $n=0$ و $n=1$ فيكون:

$$[2\lambda(\lambda-1)+\lambda-3]C_0 + [2(1+\lambda)(\lambda)+(\lambda+1)-3]C_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \{[2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+(n+\lambda)-3]C_n + C_{n-2}\} z^n = 0$$

الذي قبل المطابقة نجد: [بجعل المعامل المكتوب لـ Z مساوياً للصفر عندما $n=0$]

$$[2\lambda(\lambda-1)+\lambda-3]\,c_0=0$$

وبفرض $c_0 \neq 0$ نحصل على المعادلة المميزة للمشتق:

$$2\lambda(\lambda-1)+\lambda-3=0$$

⇓ أو

$$2\lambda^2-\lambda-3=0$$ المعادلة المميزة للمشتق

الجذران $[\lambda_1=\frac{3}{2} \;,\; \lambda_2=-1]$ لها جذران هما

بالتالي $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=0$ تحقق $(\lambda-\frac{3}{2})(\lambda+1)=0$ ⇐ تحقق المعادلة

بحالات المطابقة ينتج

$$(I) - [2\lambda(\lambda+1)+\lambda-2]\,c_1=0$$

$$(II) - [2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+(n+\lambda)-3]\,c_n+c_{n-2}=0 \;;\; \forall n\geq 2$$

ويكون من الأخيرة الدستور التدريجي العام

$$\text{من }(II) \Rightarrow c_n=\frac{-1}{(n+\lambda)(2n+2\lambda-1)-3}\,c_{n-2} \;;\; \forall n\geq 2$$ الدستور التدريجي للمعاملات

وبما أن $(\lambda_1-\lambda_2)\notin \mathbb{Z}$ (الفرق ليس عدداً صحيحاً) فالحل يكون من الشكل

$$\left[w=z^{\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n+z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n\right]$$

ومن أجل $\lambda_1=\frac{3}{2}$ نجد من القانون التدريجي وبعد تبديل كل c بـ a فإن

من القانون التدريجي
نستبدل c بـ a_n
$$\Rightarrow a_n=\frac{-1}{n(2n+5)}\,a_{n-2} \;;\; \forall n\geq 2 \quad (*)$$

$a_1=0$ ؛ (لأنه من (I) ومن أجل $\lambda=\frac{3}{2}$)

$$n=2 \overset{(*)}{\Longrightarrow} a_2=\frac{-a_0}{18}$$

$$n=3 \overset{(*)}{\Longrightarrow} a_2=0 \qquad (a_1=0 \text{ لأن})$$

$$n=4 \overset{(*)}{\Longrightarrow} a_4=\frac{a_0}{936}$$

وهكذا

وبالتالي تتحدد الثوابت a_n (حيث $n=2,3,\dots$) بدلالة a_0

ومن أجل $\lambda=-1$ نحصل من الدستور التدريجي الأساسي حيث نبدل كل c بـ b لأن:

والدستور التدريجي الأساسي لحساب b_n $\Longrightarrow$ $b_n = \frac{-b_{n-2}}{n(2n-5)}$; $\forall n \geq 2$ (*1)

($b_1 = 0$ ؛ لأن من (4) كذلك الأمر وحيث $\lambda=-1$)

ومنه نحسب التالي:

$n=2 \overset{(*1)}{\Longrightarrow} b_2 = \frac{b_0}{2}$

$n=3 \overset{(*1)}{\Longrightarrow} b_3 = 0$ (لأن $b_1=0$)

$n=4 \overset{(*1)}{\Longrightarrow} b_4 = \frac{-b_0}{24}$

وهكذا

إذن تتحدد الثوابت b_n (حيث $n=2,3,\dots$) بدلالة b_0 فقط.

ومنه الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$w = a_0 z^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{18}z^2+\frac{1}{936}z^4+\dots\right)+b_0 z^{-1}\left(1+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{24}z^4+\dots\right)$$

وحيث a_0 و b_0 ثابتان اختياريان يمكن تحديدهما من شروط بدء معطاة وهو المطلوب.

5-4- الحل في جوار نقطة اللانهاية: من أجل دراسة حل المعادلة:

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad \dots (1)$$

من الرتبة الثانية خطية في جوار النقطة $z=\infty$ نجري التحويل التالي:

بفرض أن $z=\frac{1}{t}$ * ونبحث عن الحل في جوار الصفر، ومن ثم وبعد إيجاد الحل نعود للفرض $z=\frac{1}{t}$ ونضع $t=\frac{1}{z}$ فنحصل على الحل المطلوب في جوار اللانهاية.

ويكون كما يلي:

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt}\cdot\frac{dt}{dz}$$

$$\Rightarrow w' = -t^2 \cdot \frac{dw}{dt}$$

(لأن: $* \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -t^2 = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow \frac{dt}{dz} = -t^2$)

$$w'' = \frac{d\left(-t^2\frac{dw}{dt}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dz} = -t^2\left[-2t\frac{dw}{dt} - t^2\frac{d^2w}{dt^2}\right]$$

$$\Rightarrow w'' = 2t^3 \frac{dw}{dt} + t^4 \frac{d^2w}{dt^2}]$$

(الآن نعوض لما وجدنا عن w'' في المعادلة ① فنحصل على المعادلة الجديدة ، حيث $Z = \frac{1}{t}$)

$$t^4 \frac{d^2w}{dt^2} + \left(2t^3 - t^2 p\left(\tfrac{1}{t}\right)\right)\frac{dw}{dt} + q\left(\tfrac{1}{t}\right) w = 0 \quad — ②$$

لدينا الحالات:

(1) إذا كانت النقطة $t=0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة لكل من الدالتين:

(بعد القسمة على t^4 في طرفي المعادلة الأخيرة):

$$P(t) = \frac{2t^3 - t^2 p\left(\frac{1}{t}\right)}{t^4} = \frac{2t - p\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} = 2Z - Z^2 p(Z) \quad — ③$$

$$Q(t) = \frac{1}{t^4} q\left(\tfrac{1}{t}\right) = Z^4 q(Z) \quad — ④$$

فإن النقطة $t=0$ وبالتالي $Z=\infty$ نقطة عادية للمعادلة المعطاة (1) ويكون للمعادلة (1) حل من الشكل:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{Z^n}$$

ومن الواضح أنه يشترط لكي تكون $t=0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة للدالة (3) فإن يكون

أي $p\left(\frac{1}{t}\right) = 2t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + \dots$

أي $p(Z) = \frac{2}{Z} + \frac{a_1}{Z^2} + \frac{a_2}{Z^3} + \dots$

وهذا يعني أن $Z=\infty$ هي صفر من الرتبة الأولى على الأقل أو أن

$$\left[\begin{matrix} Z p(Z) \longrightarrow 2 \\ Z \longrightarrow \infty \end{matrix}\right]$$

ويشترط لكي تكون $t=0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة للدالة (4) فإن يكون (الشرط)

أي $q\left(\frac{1}{t}\right) = b_1 t^4 + b_2 t^5 + \dots$

$$q(Z) = \frac{b_1}{Z^4} + \frac{b_2}{Z^5} + \dots$$

وهذا يعني أن $Z=\infty$ هي صفر من الرتبة الرابعة على الأقل لـ $q(Z)$

الموضوع:

(2) أما إذا كانت $t=0$ نقطة بسيطة من الأكثر للحالة (3) ونقطة شاذة من الأكثر للحالة (1).

تمرين: فإن النقطة $Z=\infty$ (المناظرة لـ $t=0$) وبالتالي تكون $Z=\infty$ نقطة شاذة نظامية ويكون الحل من الشكل:

$$w = t^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n = \frac{1}{Z^{\lambda}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{Z^n}$$

أو من الشكل:

$$w_2 = t^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n + b_1 w_1 \ln t$$
$$= \frac{1}{Z^{\lambda}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{Z^n} + b_1 w_1 \ln\frac{1}{Z}$$

مثال: خذ المعادلة:

$$w'' + \frac{Z-1}{Z(Z+1)}w' + \frac{2}{(Z+1)^2}w = 0$$

فيها:

$$p(Z) = \frac{Z-1}{Z(Z+1)} \qquad q(Z) = \frac{2}{(Z+1)^2}$$

فيها أن $Z=\infty$ هي صفر من الرتبة الأولى للدالة $p(Z)$ معامل w' وصفر من الرتبة الثانية لمعامل w أي لـ $q(Z)$ وبالتالي صحيح لاحظ أنه:

$$p(Z) = \frac{Z-1}{Z(Z+1)} = -\frac{1}{Z} + \frac{2}{Z+1}$$

بتفريق الكسور:

$$\frac{Z-1}{Z(Z+1)} = \frac{A}{Z} + \frac{B}{Z+1}$$

بتوحيد المقامات والمطابقة بين البسط من الطرفين: $A=-1$ و $B=2$

وبالتالي النقطة $Z=\infty$ هي نقطة شاذة نظامية وهنا يكون الحل للمعادلة من الشكل:

$$w = t^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n \quad ; \quad t = \frac{1}{Z}$$

أما المعادلة التفاضلية:

$$w'' + \frac{2Z-1}{Z(Z+1)}w' + \frac{2}{(Z+1)^4}w = 0$$

$Z=\infty$ هي عادية — أم شاذة نظامية للمعادلة المعطاة؟

الموضوع: / /

نلاحظ أن: $p(z)=\frac{2z-1}{z(z+1)}$ $\quad q(z)=\frac{2}{(z+1)^4}$

والآن نلاحظ أن $z=\infty$ صفر من الرتبة الأولى لـ $p(z)$ وحيث

(لاحظ أن) $z\,p(z)\xrightarrow[z\to\infty]{} 2$

وإن $z=\infty$ هي صفر من الرتبة الرابعة لـ $q(z)$ ومن هنا فإن النقطة $z=\infty$ هي نقطة عادية والحل يكون من الشكل:

$$w=\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$$

وهو المطلوب.

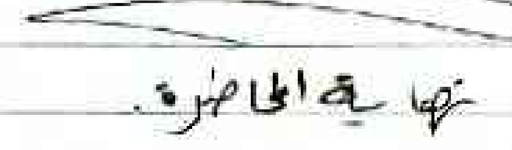
تفسير (تعليل) ذلك أن: $z\,p(z)\xrightarrow[z\to\infty]{} 2$

$$z\,p(z)=\frac{2z-1}{z+1}=\frac{2z}{z+1}-\frac{1}{z+1}$$

$$\lim_{z\to\infty} z\,p(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{2z}{z+1}=\lim_{z\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{z}}=2$$

$$z\,p(z)\xrightarrow[z\to\infty]{} 2$$

وهو المطلوب



نهاية المحاضرة.